

Topologie

Blatt 3

Abgabe: 10.06.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte).

In einem topologischen Raum X sei Δ die Menge aller Paare (x, y) in $X \times X$ mit $x = y$.

- a) Zeige, dass die Menge Δ genau dann abgeschlossen bezüglich der Produkttopologie auf $X \times X$ ist, wenn X Hausdorff ist.

Wir nehmen nun an, dass es eine stetige Abbildung $X \times X \rightarrow X$ derart gibt, dass (X, \star)

$$(x, y) \mapsto x \star y$$

eine Gruppe bildet.

- b) Zeige, dass die Abbildung $X \rightarrow X$ genau dann stetig ist, wenn sie ein Homöomorphismus
- $$x \mapsto x^{-1}$$
- ist.

- c) Zeige, dass der topologische Raum X Hausdorff ist, wenn X die Eigenschaft T_1 besitzt und die obige Abbildung in b) stetig ist.

Hinweis: $A B \Gamma \dots$

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Beschreibe alle isolierten Punkte des Intervalls $[0, 1]$ mit der Spurtopologie bezüglich der Sorgenfrey Geraden $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{Sorg})$.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Definiere in der euklidischen Geraden \mathbb{R} folgende Äquivalenzrelation:

$$xEy \iff x \cdot y > 0 \text{ oder } x = y = 0.$$

- a) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?
- b) Beschreibe vollständig alle offene Mengen der Quotiententopologie. Welche Klassen im Quotientenraum sind isoliert?
- c) Besitzt der Raum \mathbb{R}/E die Eigenschaft T_1 ?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (5 Punkte).

Sei p eine feste Primzahl.

a) Gegeben $m \leq n$ aus \mathbb{N} , zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_{m,n} : \quad \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \\ x \bmod p^n &\mapsto x \bmod p^m \end{aligned}$$

wohldefiniert ist.

Wir betrachten für jedes n aus \mathbb{N} die endliche Menge $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ als topologischen Raum mit der diskreten Topologie. Setze $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ mit der Produkttopologie.

b) Zeige, dass die Menge $\widehat{\mathbb{Z}}_p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X \mid \phi_{m,n}(x_n) = x_m \text{ für alle } m \leq n \text{ aus } \mathbb{N}\}$ abgeschlossen in X ist.

DIE ÜBUNGSBLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN (BITTE ALLE NAMEN EINTRAGEN!) ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IM ILIAS ALS EINE EINZIGE PDF-DATEI.